Rozšíření MA1 - domácí úkol 5 : Diferenciální počet funkcí dvou a tří poměnných 2.

Řešení – 2.část:

II. Derivace složené funkce více proměnných:

Nejprve - stručný návod, jak „počítat" derivace složené funkce více proměnných (podrobněji vše najdete v přednášce MA2 z 30.3.2020).

(1) Co „umíme" - derivovat složenou funkci

$$f(x_1,x_2,\dots,x_n) = g(h(x_1,x_2,\dots,x_n)),$$

kde vnější funkce g je funkce jedné proměnné, pak parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1,x_2,\dots,x_n)$ je vlastně derivace složené funkce jedné proměnné (MA1), „mění" se jen proměnná x_i, podle které derivujeme, ostatní $x_j \neq x_i$, jsou „pevné" (viz dú 4, druhá část);

(2) co ještě chybí - ukázat si, jak derivovat složenou funkci

(i) $\underline{f(t) = g(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t))}$,

kde vnější funkce je funkce obecně n proměnných, tj. $g(x_1,x_2,\dots,x_n)$, a vnitřní funkce $x_i = \varphi_i(t)$, $i=1,2,\dots,n$ jsou funkce jedné proměnné, n-tici vnitřních funkcí můžeme zapsat i vektorově $\vec{\varphi}(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t))$,

a pak $\quad f(t) = g(\vec{\varphi}(t))$

(často se píše funkce $\varphi(t) = (\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t))$ i bez „$\rightarrow$");

(ii) a budeme-li umět derivovat funkci $f(t) = g(\varphi(t))$ z (i), pak už je „jednoduché" počítat parciální derivace složené funkce, kde vnější i vnitřní funkce jsou funkce více proměnných, tj. $\underline{f(x_1,\dots,x_n) = g(\varphi_1(x_1,\dots,x_n), \dots, \varphi_m(x_1,\dots,x_n))}$.

(i) <u>Platí:</u>

1) nechť vektorová funkce $\varphi : U(t_0) \subset R \to R^n$ má derivaci v bodě t_0: $\varphi'(t_0)$;

2) označíme-li $X_0 = \varphi(t_0)$, nechť funkce g je definována v $U(X_0) \subset R^n$ a diferencovatelná v bodě X_0
(speciálně – stačí, když g má v bodě X_0 spojité všechny parciální derivace).

Pak složená funkce $f(t) = g(\varphi(t))$ má derivaci v bodě $t = t_0$ a platí:

$$\underline{f'(t_0) = \nabla g(\varphi(t_0)) \cdot \varphi'(t_0)} \qquad (*)$$

(tj. derivace $f'(t_0)$ je skalární součin gradientu $\nabla g(\varphi(t_0))$ a derivace vektorové funkce $\varphi'(t_0)$)

<u>„Rozepsáno"</u>:

$$f'(t_0) = \frac{\partial g}{\partial x_1}(\varphi_1(t_0), \dots, \varphi_n(t_0)) \cdot \varphi_1'(t_0) + \frac{\partial g}{\partial x_2}(\varphi_1(t_0), \dots, \varphi_n(t_0)) \cdot \varphi_2'(t_0) + \dots$$
$$\dots + \frac{\partial g}{\partial x_n}(\varphi_1(t_0), \dots, \varphi_n(t_0)) \cdot \varphi_n'(t_0) ,$$

neboli („stručněji")

$$f'(t_0) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\varphi_1(t_0), \dots, \varphi_n(t_0)) \cdot \varphi_i'(t_0) .$$

Tento vzorec pro derivování složené funkce se často nazývá <u>„řetízkové pravidlo"</u>.

<u>Poznámka:</u> Vzorec pro derivaci složené funkce (*) lze „číst" i tak, jako v zimní MA1 – derivace složené funkce je „derivace vnější funkce „krát" derivace funkce vnitřní –

derivace vnější funkce je „zastoupena" gradientem – tj. vektorem všech derivací, derivace vnitřní funkce je vektorová funkce derivací (vnitřní funkce) a „krát" je skalární násobení.

Speciálně:

$n=2$: vnější funkce g je funkce proměnných: $g(x,y)$, a vnitřní fce jsou $x=\varphi_1(t)$, $y=\varphi_2(t)$, pak

$$\frac{d}{dt}\left(g(\varphi_1(t),\varphi_2(t))\right)=\frac{\partial g}{\partial x}(\varphi_1(t),\varphi_2(t))\cdot\varphi_1'(t)+\frac{\partial g}{\partial y}(\varphi_1(t),\varphi_2(t))\cdot\varphi_2'(t),$$

a $n=3$: vnější funkce je $g(x,y,z)$ a $x=\varphi_1(t), y=\varphi_2(t), z=\varphi_3(t)$, pak

$$\frac{d}{dt}\left(g(\varphi_1(t),\varphi_2(t),\varphi_3(t))\right)=\frac{\partial g}{\partial x}(\varphi_1(t),\varphi_2(t),\varphi_3(t))\cdot\varphi_1'(t)+$$
$$+\frac{\partial g}{\partial y}(\varphi_1(t),\varphi_2(t),\varphi_3(t))\cdot\varphi_2'(t)+\frac{\partial g}{\partial z}(\varphi_1(t),\varphi_2(t),\varphi_3(t))\cdot\varphi_3'(t)$$

(předpoklady věty o derivaci složené funkce nechť jsou splněny)

Příklad (jednoduchý)

Je dána funkce $g(x,y)$, diferencovatelná (pro jednoduchost) v R^2, a $x=t^2$, $y=\ln t$ $(t>0)$:

$$\frac{d}{dt}\left(g(t^2,\ln t)\right)=\frac{\partial g}{\partial x}(t^2,\ln t)\,(t^2)'+\frac{\partial g}{\partial y}(t^2,\ln t)\,(\ln t)'=$$
$$=\frac{\partial g}{\partial x}(t^2,\ln t)\cdot 2t+\frac{\partial g}{\partial y}(t^2,\ln t)\cdot\frac{1}{t}$$

Je-li vnější funkce $g(x,y)$ zadána, pak samozřejmě můžeme složenou funkci $g(x(t),y(t))=f(t)$ derivovat jako „dříve" – – je to funkce jedné proměnné!

Např. $g(x,y) = \frac{y}{x}$, pak $\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = -\frac{y}{x^2}$, $\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{x}$,

a dle řetězového pravidla je

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\ln t}{t^2}\right) = -\frac{\ln t}{t^4}\cdot 2t + \frac{1}{t^2}\cdot\frac{1}{t} = \underline{\frac{1}{t^3}(1-2\ln t)},\ t>0;$$

a „klasicky" (derivace jako funkce jedné proměnné):

$$\left(\frac{\ln t}{t^2}\right)' = \left(\ln t\cdot\frac{1}{t^2}\right)' = \frac{1}{t}\cdot\frac{1}{t^2} + \ln t\left(-\frac{2}{t^3}\right) = \underline{\frac{1}{t^3}(1-2\ln t)};$$

zde je jistě jednodušší derivování funkce jedné proměnné, tj. ten „druhý" způsob, ale někdy, když jsou složený funkce složitější, bývá jednodušší užít (snad překvapivě) řetězové „pravidlo", které „skládá" výslednou derivaci složené funkce z dílčích, většinou pak jednodušších, derivací.

(ii) A nyní parciální derivace složené funkce

$$\underline{f(x_1,x_2,..,x_n) = g(\varphi_1(x_1,x_2,..,x_n),\varphi_2(x_1,x_2,..,x_n),..,\varphi_m(x_1,x_2,..,x_n))}$$

<u>Označme</u>: • $X=(x_1,x_2,..,x_n)$, $X_0=(x_1^0,x_2^0,..,x_n^0)$ (body z R^n)

• $\varphi(X) = (\varphi_1(x_1,..,x_n),..\ \varphi_m(x_1,..,x_n))$ vektorovou funkci $\varphi: \mathcal{U}(X_0)\subset R^n \to R^m$

• $Y = (y_1,..,y_m)\in R^m$, $Y_0=(y_1^0,..,y_m^0) = \varphi(X_0)\in R^m$

• $g(Y) = g(y_1,y_2,..,y_m)$; $g: \mathcal{U}(Y_0)\subset R^m \to R$

Pak platí:

1) má-li vektorová funkce $\varphi(X)$ parciální derivaci $\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(X_0)$, tj.

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(X_0) = \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_i}(X_0), \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_i}(X_0), \dots, \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_i}(X_0) \right)$$

2) funkce $g(Y)$ je diferencovatelná v bodě $Y_0 = \varphi(X_0)$
(spec. má-li $g(Y)$ spojité všechny parciální derivace $\frac{\partial g}{\partial y_j}$ v bodě $Y_0 = \varphi(X_0)$, $j = 1, 2 \dots m$),

pak složená funkce $f(X) = g(\varphi(X))$ má v bodě X_0 derivaci

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(X_0) = \nabla g(\varphi(X_0)) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(X_0) \quad \text{(skalární součin)},$$

tj. $$\underline{\frac{\partial f}{\partial x_i}(X_0) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial g}{\partial y_j}(\varphi(X_0)) \cdot \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}(X_0)}$$

Speciálně: $m = 2, n = 2$ (jako příklad):

$$\underline{f(x,y) = g(\varphi(x,y), \psi(x,y))}$$

(vnější fce je $g(u,v)$, $u = \varphi(x,y)$, $v = \psi(x,y)$)

Pak (nechť jsou splněny předpoklady předchozího tvrzení):

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{x}}(x,y) = \frac{\partial g}{\partial u}(\varphi(x,y), \psi(x,y)) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \underline{x}}(x,y) + \frac{\partial g}{\partial v}(\varphi(x,y), \psi(x,y)) \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \underline{x}}(x,y)$$

a $$\frac{\partial f}{\partial \underline{y}}(x,y) = \frac{\partial g}{\partial u}(\varphi(x,y), \psi(x,y)) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \underline{y}}(x,y) + \frac{\partial g}{\partial v}(\varphi(x,y), \psi(x,y)) \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \underline{y}}(x,y).$$

Analogicky i u funkcí víc proměnných ($n = 3, m = 2$ nebo $n = 2, m = 3$, nebo $m = 3, n = 3$) – ukážeme si to na příkladech.

Derivace složené funkce více proměnných: „technika derivování – předpokládáme, že platí předpoklady pro užití „řetízkového" pravidla - jaké to jsou předpoklady?
(Pokuste se aspoň dva následujících příkladů „sepsat" a zjistit, co „nejde"- případné nejasnosti ještě probereme.)

1. Je-li $g(t) = f(\cos t, t^3)$, určete $g'(t)$ a $g''(t)$ pro obecnou funkci f a pak pro $f(x,y) = x^y$.
2. Určete $g'(x)$ a $g''(x)$, je-li $g(x) = F(x, \varphi(x))$.
3. Určete parciální derivace 1. řádu a některou z derivací 2. řádu funkce g, je-li

   a) $g(x,y) = f(x^2 + y, xy^2)$; b) $g(x,y) = f(x^2 y, \sqrt{x+y}, \frac{y}{x})$.
4. Určete parciální derivace 1. řádu a některou z derivací 2. řádu $g(x,y) = F(x, y, \varphi(x,y))$.

5*. Transformujte diferenciální operátor $x \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial f}{\partial y}$ do polárních souřadnic,

tj. $x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi$, $r \in (0,\infty)$, $\varphi \in [0, 2\pi)$.

Řešení příkladů:

(1.) $g(t) = f(\cos t, t^3)$

předpokládejme, že $f \in C^{(2)}(R^2)$, pak je f v R^2 diferencovatelná a můžeme užít „řetízkové pravidlo":

označme vnější funkci $f(x,y)$, a $x = \cos t$, $y = t^3$

a pak:
$$g'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(\cos t, t^3)(\cos t)' + \frac{\partial f}{\partial y}(\cos t, t^3) \cdot (t^3)' =$$
$$= \frac{\partial f}{\partial x}(\cos t, t^3)(-\sin t) + \frac{\partial f}{\partial y}(\cos t, t^3) \cdot 3t^2$$

a
$$g''(t) = (-\sin t)' \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(\cos t, t^3) + (-\sin t) \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x}(\cos t, t^3)\right)' +$$
$$+ 3(t^2)' \frac{\partial f}{\partial y}(\cos t, t^3) + 3t^2 \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial y}(\cos t, t^3)\right)'$$

Zde bývá pro někoho trochu obtížnější vyjádřit derivace
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(\cos t, t^3)\right) \text{ a (podobně) i } \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(\cos t, t^3)\right),$$
kde vnější funkce jsou teď $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ a $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$, vnitřní zůstávají, $x = \cos t$, $y = t^3$.

Opět zde aplikujeme „řetízkové" pravidlo, teď pro vnější funkce $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$, resp. $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(\cos t, t^3)\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(\cos t, t^3)\,(\cos t)' + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(\cos t, t^3)\,(t^3)' =$$
$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\cos t, t^3)(-\sin t) + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\cos t, t^3)\cdot 3t^2$$

a podobně:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(\cos t, t^3)\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(\cos t, t^3)\,(\cos t)' + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(\cos t, t^3)\,(t^3)' =$$
$$= \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\cos t, t^3)(-\sin t) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\cos t, t^3)\,(3t^2).$$

A možná „rada", pokud jste se v derivacích „ztratili":
V minulých letech jsme se studenty vymysleli „dírové pravidlo" na cvičeních, a občas pomohlo :
vnější funkce u složené funkce „půjde do díry" :

$$\text{"}\ \frac{d}{dt}\Big(\bigcirc(\varphi(t),\psi(t))\Big) = \frac{\partial \bigcirc}{\partial x}(\varphi(t),\psi(t))\,\varphi'(t) + \frac{\partial \bigcirc}{\partial y}(\varphi(t),\psi(t))\cdot\psi'(t)\ \text{"}$$
$$(x=\varphi(t),\ y=\psi(t))$$

A u našeho příkladu nahoře pak „do díry" půjde $\frac{\partial f}{\partial x}$ coby vnější funkce složené funkce $\frac{\partial f}{\partial x}(\cos t, t^3)$, a pak zase $\frac{\partial f}{\partial y}$, coby vnější funkce složené funkce $\frac{\partial f}{\partial y}(\cos t, t^3)$.

Pokud budete s výpočtem derivací vyšších řádů složené funkce mít problém, tak to zkuste, třeba „dírové" pravidlo pomůže.

Tedy, „dohromady":

$$g''(t) = -\cos t \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(\cos t, t^3) + 6t\,\frac{\partial f}{\partial y}(\cos t, t^3) +$$
$$+ (-\sin t)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\cos t, t^3)(-\sin t) + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\cos t, t^3)\cdot 3t^2\right) +$$
$$+ 3t^2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\cos t, t^3)(-\sin t) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\cos t, t^3)\cdot 3t^2\right).$$

A pokud by $f \in C^{(k)}(R^2)$, $k \in N$, $k \geq 3$, pak bychom užitím řetízkového pravidla mohli počítat podobně i derivace funkce g vyšších řádů (můžete si zkusit).

<u>A pro zadanou vnější funkci $f(x,y) = x^y$</u> $\left(= e^{y \ln x}\right)$

Budeme uvažovat otevřenou množinu $G = \{[x,y];\ x>0,\ y \in R\}$ (pro vnější funkci f) a $t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ (zde $\cos t > 0$):

Zde:
$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(e^{y\ln x}\right) = y\,x^{y-1} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial y}\left(e^{y\ln x}\right) = x^y \cdot \ln x \end{aligned}\right\} (*)$$

<u>A výpočet derivace „řetízkovým" pravidlem</u>: $(x = \cos t,\ y = t^3)$:

$$\frac{d}{dt}\left((\cos t)^{t^3}\right) = t^3 (\cos t)^{t^3-1}\cdot(\cos t)' + (\cos t)^{t^3}\cdot \ln(\cos t)\cdot(t^3)' =$$

$\left(t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})\right)$

(použili jsme $(*)$ – parciální derivace složené s $x = \cos t$, $y = t^3$)

$$= \underline{t^3 \cos^{t^3-1}(-\sin t) + (\cos t)^{t^3}\cdot \ln(\cos t)\cdot 3t^2}$$

Ale derivaci složené funkce lze též počítat „přímo" jako derivaci funkce jedné proměnné

$$g(t) = (\cos t)^{t^3} = e^{t^3 \ln(\cos t)}\ :$$

a dostaneme (derivace složené funkce „z MA 1")

$$g'(t) = e^{t^3\ln(\cos t)}\left(t^3\ln(\cos t)\right)' =$$

$$= (\cos t)^{t^3}\left(3t^2 . \ln(\cos t) + t^3 . \frac{1}{\cos t} . (-\sin t)\right)$$

$$= \underline{t^3(\cos t)^{t^3-1}(-\sin t) + (\cos t)^{t^3} . 3t^2\ln(\cos t)} \quad (**)$$

a $g''(t)$:

příprava pro použití řetízkového pravidla (pro obecnou $f(x,y)$ – str. 24):

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(y x^{y-1}\right) = y(y-1)x^{y-2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(y x^{y-1}\right) = x^{y-1} + y x^{y-1}\ln x = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(x^y \ln x\right) = x^y \ln x . \ln x = x^y(\ln x)^2$$

a pak tedy:

$$g''(t) = -\cos t . \left(t^3(\cos t)^{t^3-1}\right) + 6t . (\cos t)^{t^3} \ln(\cos t) +$$

$$+ (-\sin t)\left[t^3(t^3-1)(\cos t)^{t^3-2}(-\sin t) + (\cos t)^{t^3-1}(1+t^3\ln(\cos t) . 3t^2\right] +$$

$$+ 3t^2\left[(\cos t)^{t^3-1}(1+t^3\ln(\cos t) . (-\sin t) + (\cos t)^{t^3} . \ln^2(\cos t)\right]$$

$$= -t^3(\cos t)^{t^3} + 6t(\cos t)^{t}\ln(\cos t) +$$

$$+ (\sin t)^2 . t^3(t^3-1)\cos^{t^3-2} + 2 . (3t^2 . (\cos t)^{t^3-1}\left(1+t^3\ln(\cos t)\right) +$$

$$+ 3t^2(\cos t)^{t^3} . \ln^2(\cos t)$$

Můžete zkusit kontrolu „mého" výpočtu $g''(t)$ i derivací $(**)$.

(2.) Mějme funkci $\underline{g(x) = F(x,\varphi(x))}$, nechť $F \in C^{(2)}(G)$, $G \subset R^2$, G otevřená množina, $\varphi''(x)$ nechť existuje v (a,b), přičemž $\{ [x,y] \in R^2;\ x \in (a,b) \wedge y = \varphi(x) \} \subset G$.

Pak pro výpočet $g'(x)$ a $g''(x)$ můžeme užít větu o derivaci složené funkce ("řetízkové" pravidlo) – předpoklady věty jsou splněny:

$$\underline{g'(x)} = \frac{d}{dx}\left(F(x,\varphi(x))\right) = \frac{\partial F}{\partial x}(x,\varphi(x))\,(x)' + \frac{\partial F}{\partial y}(x,\varphi(x))\cdot\varphi'(x) =$$

$$= \frac{\partial F}{\partial x}(x,\varphi(x)) + \frac{\partial F}{\partial y}(x,\varphi(x))\cdot\varphi'(x).$$

a

$$\underline{g''(x)} = \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial x}(x,\varphi(x))\right) + \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y}(x,\varphi(x))\right)\cdot\varphi'(x) + \frac{\partial F}{\partial y}(x,\varphi(x))\cdot\varphi''(x) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)(x,\varphi(x))\cdot 1 + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)(x,\varphi(x))\cdot\varphi'(x) +$$

$$+ \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)(x,\varphi(x))\cdot 1 + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)(x,\varphi(x))\,\varphi'(x)\right)\cdot\varphi'(x) +$$

$$+ \varphi''(x)\cdot\frac{\partial F}{\partial y}(x,\varphi(x)) = \left(\text{neboť } \frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 F}{\partial y\partial x}(x,y) \text{ v } G\right)$$

$$= \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x,\varphi(x)) + 2\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}(x,\varphi(x))\cdot\varphi'(x) + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x,\varphi(x))\cdot(\varphi'(x))^2 +$$

$$+ \varphi''(x)\cdot\frac{\partial F}{\partial y}(x,\varphi(x))$$

(3.) a) Mějme funkci $\underline{g(x,y) = f(x^2+y,\ xy^2)}$, kde $f \in C^{(2)}(R^2)$; pak jsou splněny předpoklady řetízkového pravidla pro výpočet parciálních derivací (až druhého řádu) funkce $g(x,y)$, pro výpočet označme proměnné funkce f: $f(u,v)$, kde tedy $u = x^2+y$, $v = xy^2$:

Pak:

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial u}(x^2+y, xy^2)\cdot\frac{\partial}{\partial x}(x^2+y) + \frac{\partial f}{\partial v}(x^2+y, xy^2)\cdot\frac{\partial}{\partial x}(xy^2) =$$
$$= \frac{\partial f}{\partial u}(x^2+y, xy^2)\cdot 2x + \frac{\partial f}{\partial v}(x^2+y, xy^2)\cdot y^2$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial u}(x^2+y, xy^2)\frac{\partial}{\partial y}(x^2+y) + \frac{\partial f}{\partial v}(x^2+y, xy^2)\cdot\frac{\partial}{\partial y}(xy^2) =$$
$$= \frac{\partial f}{\partial u}(x^2+y, xy^2)\cdot 1 + \frac{\partial f}{\partial v}(x^2+y, xy^2)\cdot 2xy \;;$$

a tiež

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x\partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial u}(x^2+y, xy^2)\cdot 2x + \frac{\partial f}{\partial v}(x^2+y, xy^2)\cdot y^2\right) =$$
$$= 2x\cdot\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial u}(x^2+y, xy^2)\right) + y^2\cdot\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial v}(x^2+y, xy^2)\right) + 2y\cdot\frac{\partial f}{\partial v}(x^2+y, xy^2) =$$
$$= 2x\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)(x^2+y, xy^2)\cdot\frac{\partial}{\partial y}(x^2+y) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)(x^2+y, xy^2)\cdot\frac{\partial}{\partial y}(xy^2)\right] +$$
$$+ y^2\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)(x^2+y, xy^2)\cdot\frac{\partial}{\partial y}(x^2+y) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)(x^2+y, xy^2)\cdot\frac{\partial}{\partial y}(xy^2)\right] +$$
$$+ 2y\frac{\partial f}{\partial v}(x^2+y, xy^2) =$$

$$= 2x\cdot\left[\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(x^2+y, xy^2) + \frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}(x^2+y, xy^2)\cdot 2xy\right] + 2y\frac{\partial f}{\partial v}(x^2+y, xy^2) +$$
$$+ y^2\left[\frac{\partial^2 f}{\partial v\partial u}(x^2+y, xy^2) + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}(x^2+y, xy^2)\cdot 2xy\right] =$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(x^2+y, xy^2)\cdot 2x + \frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}(x^2+y, xy^2)\left(4x^2y + y^2\right) +$$
$$+ \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}(x^2+y, xy^2)\cdot 2xy^3 + 2y\cdot\frac{\partial f}{\partial v}(x^2+y, xy^2).$$

3b) $g(x,y) = f\left(x^2y, \sqrt{x+y}, \frac{y}{x}\right)$

Nechť $f \in C^{(2)}(R^3)$, $x \neq 0$, $x+y>0$ – pak můžeme užít řetízkové pravidlo (předpoklady věty jsou splněny); pak (označíme vnější funkci $f(u,v,w)$):

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial u}\left(x^2y, \sqrt{x+y}, \frac{y}{x}\right)\cdot\frac{\partial}{\partial x}(x^2y) + \frac{\partial f}{\partial v}\left(x^2y, \sqrt{x+y}, \frac{y}{x}\right)\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left(\sqrt{x+y}\right) + \frac{\partial f}{\partial w}\left(x^2y, \sqrt{x+y}, \frac{y}{x}\right)\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{x}\right) =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial u}\left(x^2y, \sqrt{x+y}, \frac{y}{x}\right)\cdot 2xy + \frac{\partial f}{\partial v}\left(x^2y, \sqrt{x+y}, \frac{y}{x}\right)\cdot\frac{1}{2\sqrt{x+y}} + \frac{\partial f}{\partial w}\left(x^2y, \sqrt{x+y}, \frac{y}{x}\right)\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right)$$

a

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial u}\left(x^2y, \sqrt{x+y}, \frac{y}{x}\right)\cdot\frac{\partial}{\partial y}(x^2y) + \frac{\partial f}{\partial v}\left(x^2y, \sqrt{x+y}, \frac{y}{x}\right)\cdot\frac{\partial}{\partial y}\left(\sqrt{x+y}\right) + \frac{\partial f}{\partial w}\left(x^2y, \sqrt{x+y}, \frac{y}{x}\right)\cdot\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x}\right) =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial u}\left(x^2y, \sqrt{x+y}, \frac{y}{x}\right)\cdot x^2 + \frac{\partial f}{\partial v}\left(x^2y, \sqrt{x+y}, \frac{y}{x}\right)\frac{1}{2\sqrt{x+y}} + \frac{\partial f}{\partial w}\left(x^2y, \sqrt{x+y}, \frac{y}{x}\right)\cdot\frac{1}{x}$$

A z „druhých" parciálních derivací spočtěme zde třeba $\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x,y)$ – – výpočet na další stránce (trochu delší):

$$\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\left(x^2y, \sqrt{x+y}, \frac{y}{x}\right)\cdot x^2 + \frac{\partial f}{\partial v}\left(x^2y, \sqrt{x+y}, \frac{y}{x}\right)\frac{1}{2\sqrt{x+y}} + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial f}{\partial w}\left(x^2y, \sqrt{x+y}, \frac{y}{x}\right)\cdot\frac{1}{x}\right) =$$

$$= x^2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\left(x^2y, \sqrt{x+y}, \frac{y}{x}\right)\cdot\frac{\partial}{\partial y}(x^2y) + \frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}\left(x^2y, \sqrt{x+y}, \frac{y}{x}\right)\cdot\frac{\partial}{\partial y}\left(\sqrt{x+y}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial^2 f}{\partial u\partial w}\left(x^2y, \sqrt{x+y}, \frac{y}{x}\right)\cdot\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x}\right)\right) + \left(-\frac{1}{4}\frac{1}{\left(\sqrt{x+y}\right)^3}\right)\cdot\frac{\partial f}{\partial v}\left(x^2y, \sqrt{x+y}, \frac{y}{x}\right) +$$

$$+ \frac{1}{2\sqrt{x+y}}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial v\partial u}\left(x^2y, \sqrt{x+y}, \frac{y}{x}\right)\cdot\frac{\partial}{\partial y}(x^2y) + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\left(x^2y, \sqrt{x+y}, \frac{y}{x}\right)\frac{\partial}{\partial y}\left(\sqrt{x+y}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial^2 f}{\partial v\partial w}\left(x^2y, \sqrt{x+y}, \frac{y}{x}\right)\cdot\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x}\right)\right) +$$

$$+ \frac{1}{x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial w\partial u}\left(x^2y, \sqrt{x+y}, \frac{y}{x}\right)\cdot\frac{\partial}{\partial y}(x^2y) + \frac{\partial^2 f}{\partial w\partial v}\left(x^2y, \sqrt{x+y}, \frac{y}{x}\right)\frac{\partial}{\partial y}\left(\sqrt{x+y}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial^2 f}{\partial w^2}\left(x^2y, \sqrt{x+y}, \frac{y}{x}\right)\cdot\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x}\right)\right).$$

$$= -\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\left(\sqrt{x+y}\right)^3}\cdot\frac{\partial f}{\partial v}\left(x^2y, \sqrt{x+y}, \frac{y}{x}\right) + x^4\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\left(x^2y, \sqrt{x+y}, \frac{y}{x}\right) +$$

$$+ \frac{1}{4(x+y)}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\left(x^2y, \sqrt{x+y}, \frac{y}{x}\right) + \frac{1}{x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial w^2}\left(x^2y, \sqrt{x+y}, \frac{y}{x}\right) +$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}\left(x^2y, \sqrt{x+y}, \frac{y}{x}\right)\left(\frac{x^2}{2\sqrt{x+y}}\cancel{x}\right) + \frac{\partial^2 f}{\partial u\partial w}\left(x^2y, \sqrt{x+y}, \frac{y}{x}\right)\cdot 2x + \quad -$$

$$+ \frac{\partial^2 f}{\partial v\partial w}\left(x^2y, \sqrt{x+y}, \frac{y}{x}\right)\frac{1}{x\sqrt{x+y}}.$$

(smíšené derivace 2. řádu f jsou „záměnné“ díky předpokladu $f \in C^{(2)}(R^3)$)

④ $g(x,y) = F(x,y,\varphi(x,y))$:

pro jednoduchost předpokládejme, že $F(x,y,z) \in C^{(2)}(R^3)$ a $\varphi(x,y) \in C^{(2)}(R^2)$:
a pak:

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial F}{\partial x}(x,y,\varphi(x,y)) \cdot \underbrace{\frac{\partial x}{\partial x}}_{(=1)} + \frac{\partial F}{\partial y}(x,y,\varphi(x,y)) \cdot \underbrace{\frac{\partial y}{\partial x}}_{(=0)} + \frac{\partial F}{\partial z}(x,y,\varphi(x,y)) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,y) =$$

$$= \frac{\partial F}{\partial x}(x,y,\varphi(x,y)) + \frac{\partial F}{\partial z}(x,y,\varphi(x,y)) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,y) \ ;$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial F}{\partial y}(x,y,\varphi(x,y)) + \frac{\partial F}{\partial z}(x,y,\varphi(x,y)) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x,y) \ ;$$

(podobně – $\frac{\partial x}{\partial y} = 0$, $\frac{\partial y}{\partial y} = 1$)

a třeba z druhých derivací určíme $\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}$:

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,\varphi(x,y))\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,\varphi(x,y))\right) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x,y) +$$

$$+ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}(x,y) \cdot \frac{\partial F}{\partial z}(x,y,\varphi(x,y)) = \text{(opět řetízkové pravidlo)}$$

$$= \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x,y,\varphi(x,y)) \cdot 1 + \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z}(x,y,\varphi(x,y)) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x,y) +$$

$$+ \left(\frac{\partial^2 F}{\partial z \partial y}(x,y,\varphi(x,y)) \cdot 1 + \frac{\partial^2 F}{\partial z \partial y}(x,y,\varphi(x,y)) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x,y)\right) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x,y) +$$

$$+ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}(x,y) \cdot \frac{\partial F}{\partial z}(x,y,\varphi(x,y)) \ .$$

(zde opět „uvažme": $\frac{\partial x}{\partial y} = 0$, $\frac{\partial y}{\partial y} = 1$)

(5) Máme transformovat diferenciální operátor

$$x \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y}$$

do polárních souřadnic r, φ, $r \in (0, +\infty)$, $\varphi \in \langle 0, 2\pi)$:

$$x = r\cos\varphi \;, \quad y = r\sin\varphi$$

Místo řešení tohoto příkladu zde uvádím překlad (str. 13, 14) z přednášky 30. 3. 2020 – transformace diferenciálního operátoru

$$x \cdot \frac{\partial f}{\partial y} - y \frac{\partial f}{\partial x} \quad ;$$

pomocí transformace tohoto diferenciálního operátoru do polárních souřadnic pak lze „snadno" řešit parciální diferenciální rovnici pro funkci $f(x,y)$:

$$x \cdot \frac{\partial f}{\partial y} - y \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \; .$$

Pokud transformace $\frac{\partial f}{\partial x}$ a $\frac{\partial f}{\partial y}$ na $\frac{\partial \phi}{\partial r}, \frac{\partial \phi}{\partial \varphi}$, kde

$$\phi(r,\varphi) = f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) \, ,$$

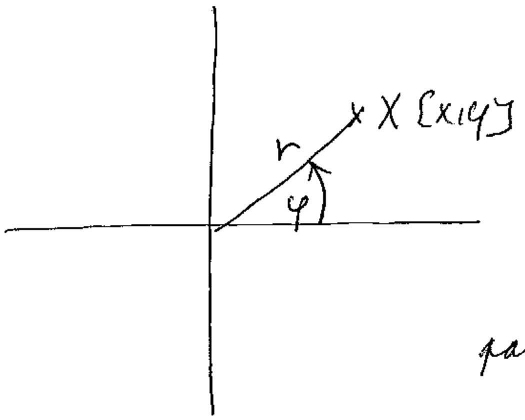
což je „spočítáno" v uvedeném příkladu, můžete si vyřešit i zadaný v dú příklad 5 – nechám už na vás.

A příklad, kde se řetízkové pravidlo „uplatní“:

a) Máme řešit diferenciální rovnici (tzv. parciální dif. rovnici)

$$(*) \qquad x \cdot \frac{\partial f}{\partial y} - y \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad - \quad ?\ f(x,y) \in C^{(1)}(R^2)$$

Pro nás je jistě taková rovnice „záhadou“, ale „autoři“ vědí, že řešení závisí jen na vzdálenosti bodu (x,y) od počátku (tak „vznikl“ model v podobě dif. rovnice)
A pro takovouto situaci se „hodí“ jiné souřadnice, než na které jsme „zvyklí“, tj. kartézské – i pro nás budou (u vícenásobných integrálů) tzv. souřadnice polární:



poloha bodu $X \neq [0,0]$ udána
1) vzdálenost bodu X od počátku O – $r > 0$
2) úhel $\varphi \in \langle 0, 2\pi)$ který svírá „spojnice“ O a X s kladnou poloosou x.

pak: $x = r\cos\varphi \ (= x(r,\varphi))$, $r \in (0,+\infty)$
$y = r\sin\varphi \ (= y(r,\varphi))$ $\varphi \in \langle 0, 2\pi)$

Pak hledáme místo původní funkce $f(x,y)$ hledáme funkci $\Phi(r,\varphi)$ tak, že $\Phi(r,\varphi) = f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$ (*)

a transformace rovnice (*) vlastně znamená „vyjádřit (nahradit) $\frac{\partial f}{\partial x}$ a $\frac{\partial f}{\partial y}$ pomocí $\frac{\partial \Phi}{\partial r}$ a $\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}$“:

A zde „užijeme“ řetízkové pravidlo pro derivování složené „funkce“ v (*): $f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$:
(předpoklady jsou „dostatečné“)

Je-li $\phi(r,\varphi) = f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$, pak (píšeme „stručněji")

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial r} &= \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\cos\varphi + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\sin\varphi \\ \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} &= \frac{\partial f}{\partial x}(-r\sin\varphi) + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot r\cos\varphi \end{aligned}\right\}$$

soustava rovnic pro $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$

(řešením dostaneme „náhrady" těchto derivací)

determinant soustavy

$$\begin{vmatrix} \cos\varphi, & \sin\varphi \\ -r\sin\varphi, & \cos\varphi\cdot r \end{vmatrix} = r \neq 0 \ (\text{pro } r>0),$$

tedy soustava má právě 1 řešení pro každý bod $(r,\varphi) \in (0,+\infty) \times \langle 0, 2\pi)$, a

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial r}\cdot\cos\varphi - \frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial \varphi}\sin\varphi,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial \phi}{\partial r}\sin\varphi + \frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial \varphi}\cos\varphi$$

a dosazením do rovnice (*) dostaneme:

$$r\cos\varphi\left(\frac{\partial \phi}{\partial r}\sin\varphi + \frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial \varphi}\cos\varphi\right) - r\sin\varphi\left(\frac{\partial \phi}{\partial r}\cos\varphi - \frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial \varphi}\sin\varphi\right) = 0$$

tj. $\frac{\partial \phi}{\partial \varphi}(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = 0$, tedy

$$\frac{\partial \phi}{\partial \varphi}(r,\varphi) = 0 \implies \phi(r,\varphi) = \phi(r), \quad r = \sqrt{x^2+y^2};$$

tedy (opět ve kartézských souřadnicích) – řešení rovnice (*) je

$$\underline{f(x,y) = \phi\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)}, \quad \phi \in C^1(0,+\infty))$$

$x^2+y^2 > 0$, tj.

$(x,y) \in R^2 \setminus \{[0,0]\}$